Dariusz Kacprzak[*]

Przychód i koszt całkowity przedsiębiorstwa wyrażony przy użyciu skierowanych liczb rozmytych

Wstęp

Zbiory i liczby rozmyte pozwalają na matematyczny opis oraz przetwarzanie wielkości i informacji nieprecyzyjnych. Znajdują one, z powodzeniem, szerokie zastosowanie w zagadnieniach związanych ze sterowaniem (np. sterowanie metrem w japońskim mieście Sendai) czy podejmowaniem decyzji. Jednak zdefiniowane przez Zadeha liczby rozmyte oraz późniejsza ich modyfikacja dokonana przez Dubois'a i Prade, tzw. liczby typu LR, obarczone są pewnymi niedoskonałościami, które w znaczącym stopniu ograniczają ich stosowanie w ekonomii.

Próby przezwyciężenia głównych niedoskonałości modeli liczb rozmytych opartych na zasadzie rozszerzenia Zadeha doprowadziły do powstania modelu skierowanych liczb rozmytych – Ordered Fuzzy Numbers (*OFN*). Działania algebraiczne w tym modelu są analogiczne do działań na liczbach rzeczywistych, które można traktować jako szczególny przypadek liczb rozmytych. Otwiera to szerokie pole do stosowania *OFN* w modelowaniu ekonomicznym.

Niniejsza praca stanowi próbę wykorzystania *OFN* do opisu wielkości ekonomicznych. Liczby te pozwalają na jednoczesne obrazowanie i łatwe przetwarzanie kilku czynników, co w rezultacie może doprowadzić do uproszczenia złożonych modeli ekonomicznych.

1. Skierowane liczby rozmyte

1.1. Geneza skierowanych liczb rozmytych

Pojęcie zbioru rozmytego wprowadził Lotfi Zadeh w 1965 roku (Zadeh, 1965). Zbiorem rozmytym A w pewnej przestrzeni (uniwersum) X nazywamy zbiór par

$$A = \{(x, \mu_A) : x \in X\} \tag{1}$$

gdzie $\mu_A : X \to [0,1]$ jest funkcją, która przypisuje każdemu elementowi $x \in X$ jego stopień przynależności do zbioru rozmytego A.

[*] Dr, Katedra Matematyki, Wydział Informatyki, Politechnika Białostocka, d.kacprzak@pb.edu.pl, ul. Wiejska 45A, 15-351 Białystok

Jednocześnie z określeniem zbioru rozmytego A definiujemy jego pewne charakterystyki takie jak normalność, wypukłość czy nośnik:

– zbiór rozmyty A nazywamy normalnym jeżeli:
$$\exists x \in X : \mu_A(x) = 1, \tag{2}$$
– zbiór rozmyty A jest wypukły gdy:
$$\forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0,1] : \mu_A(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y)), \tag{3}$$
– nośnikiem zbioru rozmytego A nazywamy następujący zbiór nierozmyty:
$$\operatorname{supp} A = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}. \tag{4}$$

Liczbą rozmytą nazywamy zbiór rozmyty określony na uniwersum rzeczywistym R ($X = R$), który jest normalny, wypukły, nośnik jest przedziałem a funkcja przynależności jest przedziałami ciągła.

Niech $A = \{(x, \mu_A) : x \in X\}$ i $B = \{(x, \mu_B) : x \in X\}$ będą liczbami rozmytymi. Podstawowe operacje arytmetyczne na tych liczbach jak dodawanie (+), odejmowanie (–), mnożenie (·) oraz dzielenie (/) wyglądają następująco:
$$\mu_{A*B}(z) = \sup_{z=x*y} [\min(\mu_A(x), \mu_B(y))], \quad \forall x, y, z \in R \tag{5}$$
gdzie „*" oznacza „+", „–", „·" i „/" gdy $y \neq 0$.

Powyższe określenie operacji arytmetycznych na liczbach rozmytych pokazuje, że wykonywanie działań jest dość skomplikowane, ponieważ wymaga wykonania wielu operacji arytmetycznych zarówno na elementach nośników jak i na ich stopniach przynależności. Aby uprościć działania na liczbach rozmytych w roku 1978 Dubois i Prade (Dubois, Prade, 1978) zaproponowali model liczb rozmytych nazywany modelem LR.

Mówimy, że liczba rozmyta A jest liczbą rozmytą typu LR, jeżeli jej funkcja przynależności ma postać:
$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right) & \text{gdy} \quad x \leq m \\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right) & \text{gdy} \quad x \geq m \end{cases}, \tag{6}$$
gdzie m jest liczbą rzeczywistą nazywaną wartością średnią $(\mu_A(m) = 1)$, natomiast $\alpha > 0$ i $\beta > 0$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi nazywanymi rozrzutami odpowiednio lewo- i prawostronnym. L i R są ustalonymi funkcjami nazywanymi bazowymi, które spełniają warunki:

– $L(-x) = L(x)$, $R(-x) = R(x)$,
– $L(0) = 1$, $R(0) = 1$,

– L i R są nierosnącymi funkcjami na przedziale $[0,+\infty)$.

Patrząc na powyższą funkcję przynależności łatwo można zauważyć, że liczba rozmyta A typu LR jest charakteryzowana przez trzy parametry m, α i β co pozwala zapisać ją w postaci $A=(m_A,\alpha_A,\beta_A)$. Wówczas podstawowe operacje na liczbach rozmytych typu LR sprowadzają się do operacji na tych trzech parametrach.

Jednak mimo uproszczenia działań, niektóre z nich dają wyniki przybliżone (np. iloczyn i iloraz). Ponadto nie udało się usunąć innych niedoskonałości, które ograniczają stosowanie tych liczb rozmytych w ekonomii. Chodzi tu między innymi o powiększanie nośnika. Niezależnie czy dwie liczby rozmyte dodamy czy odejmiemy następuje powiększanie nośnika. Sprawia to, że po wykonaniu wielu działań nośnik liczby wynikowej może być tak szeroki, że informacja, którą wynikowa liczba prezentuje staje się mało użyteczna. Ponadto dla dowolnej liczby rozmytej nie istnieją elementy symetryczne względem dodawania i mnożenia. Oznacza to brak możliwości rozwiązywania równań metodą eliminacji. Wspomnianych powyżej ograniczeń pozbawiony jest nowy model liczb rozmytych, tzw. skierowane liczby rozmyte – Ordered Fuzzy Numbers.

1.2. Model skierowanych liczb rozmytych

Model skierowanych liczb rozmytych został zaproponowany w 2002 roku przez prof. Witolda Kosińskiego, Piotra Prokopowicza i Dominika Ślęzaka (Kosiński i inni, 2002, Kosiński i inni, 2003, Kosiński, Prokopowicz, 2004).

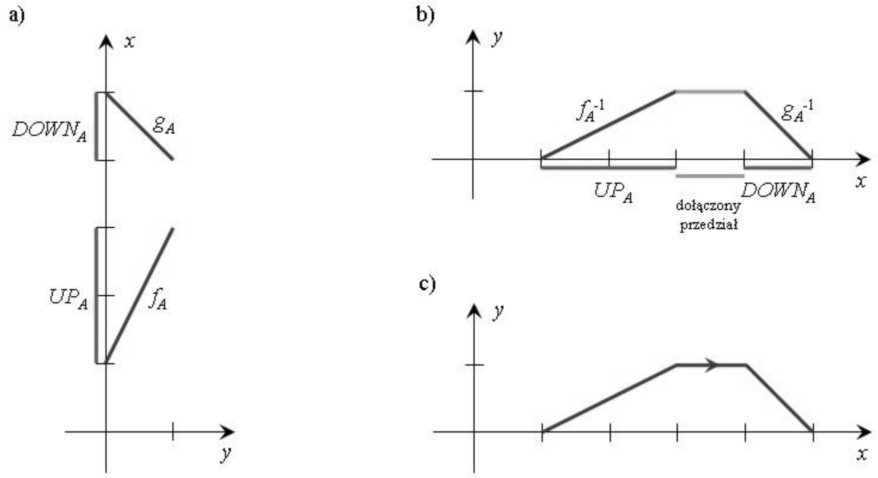
Skierowaną liczbą rozmytą A nazywamy uporządkowaną parę funkcji:

$$A=(f_A,g_A), \tag{7}$$

gdzie obie funkcje są ciągłe oraz $f_A,g_A:[0,1]\to R$. Odpowiednie części skierowanej liczby rozmytej nazywamy częścią wznoszącą (*UP*) i częścią opadającą (*DOWN*) (zobacz rysunek 1a). Z ciągłości obu części wynika, że ich obrazy są ograniczonymi przedziałami odpowiednio UP_A i $DOWN_A$, których granice oznaczamy następująco: $UP_A=(l_A,1_A^-)$ oraz $DOWN_A=(1_A^+,p_A)$. Do tych zbiorów możemy dołączyć na przedziale $[1_A^-,1_A^+]$ (ten przedział może być jednoelementowy) funkcję stałą (*CONST*) równą 1 (warunek normalności) (zobacz rysunek 1b). Wówczas $UP_A\cup[1_A^-,1_A^+]\cup DOWN_A$ tworzy jeden przedział, nośnik liczby A. Jeżeli funkcje f_A i g_A są monotoniczne, istnieją do nich funkcje odwrotne f_A^{-1} i g_A^{-1} określone na odpowiednich przedziałach UP_A i $DOWN_A$ co pozwala na określenie funkcji przynależności μ_A skierowanej liczby rozmytej A w następujący sposób (Kacprzak, 2008, Kacprzak, 2010):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad x \notin [l_A, p_A] \\ f_A^{-1}(x) & \text{gdy} \quad x \in UP_A \\ 1 & \text{gdy} \quad x \in [1_A^-, 1_A^+] \\ g_A^{-1}(x) & \text{gdy} \quad x \in DOWN_A \end{cases} . \tag{8}$$

Rysunek 1. a) Przykładowa skierowana liczba rozmyta, b) skierowana liczba rozmyta przedstawiona w sposób nawiązujący do liczb rozmytych w klasycznym podejściu, c) strzałka przedstawiająca porządek odwróconych funkcji i orientację skierowanej liczby rozmytej.



Źródło: [Kosiński i inni, Ślęzak, 2002].

Skierowane liczby rozmyte nawiązują do klasycznych liczb rozmytych, są jednak wyposażone w dodatkową własność zaznaczoną strzałką – skierowanie (zobacz rysunek 1c). Podstawowe operacje na skierowanych liczbach rozmytych określone są następująco. Niech $A = (f_A, g_A)$, $B = (f_B, g_B)$ i $C = (f_C, g_C)$ będą skierowanymi liczbami rozmytymi wówczas:

$$\forall y \in [0,1] \quad [f_C(y) = f_A(y) * f_B(y) \quad \text{i} \quad g_C(y) = g_A(y) * g_B(y)], \tag{9}$$

gdzie „*" oznacza „+", „-", „·" i „/" gdy $\forall y \in [0,1] \quad f_B(y) \neq 0, \quad g_B(y) \neq 0$.

Tak określone działania są analogiczne do działań na liczbach rzeczywistych, w szczególności dla dowolnej skierowanej liczby rozmytej A mamy (zobacz rysunek 2):

$$A - A = A + (-1) \cdot A = 0 \tag{10}$$

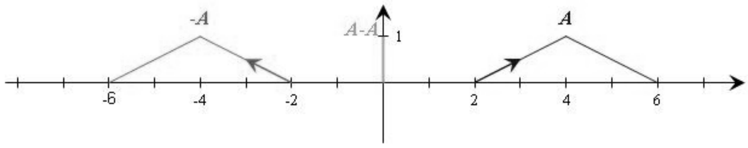
oraz

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot \frac{1}{A} = 1 \tag{11}$$

o ile skierowana liczba A jest odwracalna, gdzie 0 i 1 oznaczają liczby rzeczywiste z funkcją charakterystyczną postaci:

$$\chi_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x = r \\ 0 & \text{gdy} \quad x \neq r \end{cases}. \tag{12}$$

Rysunek 2. Suma skierowanych liczb rozmytych przeciwnych



Źródło: Opracowanie własne.

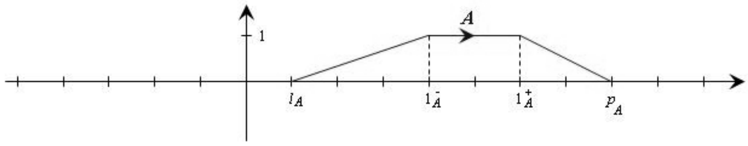
Pozwala to na rozwiązywanie równań postaci $X + A = B$ oraz $X \cdot C = D$ (z niewiadomą X) w skierowanych liczbach rozmytych stosując metodę eliminacji, w sposób zbliżony do rozwiązywania równań na liczbach rzeczywistych.

Na rysunku 3 pokazano przykładową skierowaną liczbę rozmytą A i zaznaczono jej charakterystyczne punkty. Pozwala to na opisanie takiej liczby za pomocą czwórki liczb rzeczywistych:

$$A = (l_A \quad 1_A^- \quad 1_A^+ \quad p_A) \tag{13}$$

gdzie $\mu_A(l_A) = 0$, $\mu_A(1_A^-) = 1$, $\mu_A(1_A^+) = 1$ i $\mu_A(p_A) = 0$.

Rysunek 3. Przykładowa *OFN* wraz z charakterystycznymi punktami



Źródło: Opracowanie własne.

Taka reprezentacja skierowanych liczb rozmytych umożliwia szybkie wykonywanie działań używając jedynie tych charakterystycznych elementów. Niech $A = (l_A \quad 1_A^- \quad 1_A^+ \quad p_A)$ i $B = (l_B \quad 1_B^- \quad 1_B^+ \quad p_B)$ będą skierowanymi liczbami rozmytymi. Wówczas:

$$A \pm B = (l_A \pm l_B \quad 1_A^- \pm 1_B^- \quad 1_A^+ \pm 1_B^+ \quad p_A \pm p_B). \tag{14}$$

Możemy również określić szerokość nośnika jako:

$$| \mathrm{supp} A | = \max\{l_A, 1_A^-, 1_A^+, p_A\} - \min\{l_A, 1_A^-, 1_A^+, p_A\} . \qquad (15)$$

W dalszej części przedstawiony zostanie przykład zastosowania skierowanych liczb rozmytych do opisu wielkości ekonomicznych, jak przychód i koszt całkowity przedsiębiorstwa. Pozwalają one na jednoczesne obrazowanie kilku elementów.

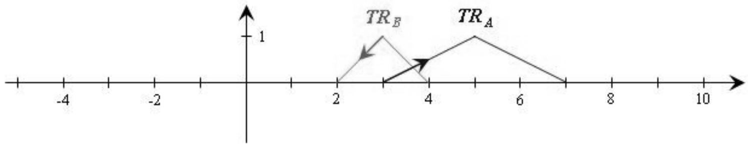
2. Skierowane liczby rozmyte prezentujące przychód i koszt całkowity przedsiębiorstwa

Ekonomiści zwykle zakładają, że celem działalności przedsiębiorstw jest maksymalizacja zysku, który powstaje w wyniku pomniejszenia przychodu całkowitego – TR (total revenue) o koszt całkowity – TC (total cost). Przychód całkowity jest to wartość dóbr sprzedanych przez przedsiębiorstwo w pewnym okresie. Natomiast koszt całkowity jest to wartość czynników produkcji zużytych w tym okresie (Czarny, Rapacki, 2002). Określenie prognoz wartości przychodu i kosztu całkowitego na nadchodzący okres może być podstawą do podjęcia decyzji właściciela czy też zarządu przedsiębiorstwa o rozwoju lub zaniechaniu produkcji przez przedsiębiorstwo. Jednak oprócz prognoz istotne są również informacje o bieżących poziomach tych wielkości, zakresie i kierunku zmian. Wymaga to podania szeregu liczb rzeczywistych, w gąszczu których łatwo się pogubić. W tym miejscu możemy wykorzystać skierowane liczby rozmyte, które pozwalają na proste i przejrzyste przedstawienie kilku wielkości jednocześnie oraz łatwe przetwarzanie tych informacji.

Załóżmy, że analizowane przedsiębiorstwo składa się z dwóch zakładów czy też placówek handlowych, nazwijmy je A i B, z których każda jednostka analizowana jest niezależnie pod względem uzyskanego przychodu i poniesionych kosztów (w przypadku większej liczby jednostek możemy uznać, że jednostka B jest „agregatem" pozostałych). Ekspert, który dokonywał analizy i prognoz na nadchodzący okres, wyniki swojej pracy przedstawił za pomocą skierowanych liczb rozmytych trójkątnych – jądro jest zbiorem jednoelementowym (zobacz rysunek 4). Za ich pomocą zobrazował trzy istotne informacje:

- prognozowaną wartość, jest to element jądra,
- prognozowaną tendencję, wzrost lub spadek w porównaniu z okresem bieżącym, obrazowaną skierowaniem,
- wielkość zmiany (wzrostu lub spadku) w stosunku do bieżącego okresu, mierzoną za pomocą szerokości nośnika.

Rysunek 4. Prognozowane przychody całkowite jednostek A i B



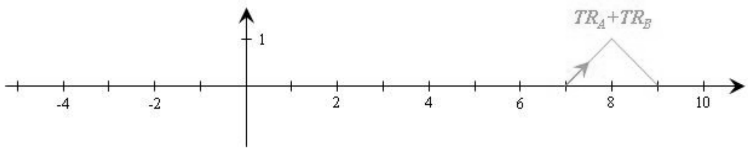
Źródło: opracowanie własne.

Widoczne na rysunku 4 prognozy przychodu całkowitego dla obu jednostek pozwalają na wyciągnięcie następujących wniosków. W jednostce A ($TR_A = (3 \quad 5 \quad 5 \quad 7)$) w nadchodzącym okresie ekspert przewiduje, że przychód całkowity będzie się kształtował na poziomie „około 5"mln. Ponadto będzie on wyższy od przychodu w okresie bieżącym (skierowanie) o około 4mln (szerokość nośnika), co pokazuje, że jednostka bardzo dobrze się rozwija. Z kolei prognozy dla jednostki B ($TR_B = (4 \quad 3 \quad 3 \quad 2)$) nie są już tak dobre. Przewidywany przychód będzie się kształtował na poziomie „około 3"mln i będzie niższy niż w okresie bieżącym o około 2mln. Z takiej interpretacji bezpośrednio możemy odtworzyć bieżące wartości przychodu całkowitego w poszczególnych jednostkach jako prognozowanych przychód minus (w przypadku wzrostu) lub plus (w przypadku spadku) szerokość nośnika. I tak w jednostce A kształtuje się on na poziomie "około 1"mln a w jednostce B na „około 5"mln.

Właściciela czy zarząd poza informacjami z poszczególnych jednostek interesuje również „zagregowany" przychód całkowity przedsiębiorstwa. Z opisanych informacji wynika, że prognozowany przychód całkowity przedsiębiorstwa będzie oscylował na poziomie „około 8"mln. Ponadto w jednostce A przychód będzie wyższy o około 4mln niż w okresie bieżącym, a w jednostce B niższy o około 2mln co wypadkowo będzie skutkowało wzrostem przychodu przedsiębiorstwa o około 2mln w stosunku do poziomu bieżącego wynoszącego „około 6"mln. Wnioski te są zgodne z informacjami widocznymi na rysunku 5, który przedstawia sumę skierowanych liczb rozmytych TR_A i TR_B ($TR_A + TR_B = (7 \quad 8 \quad 8 \quad 9)$).

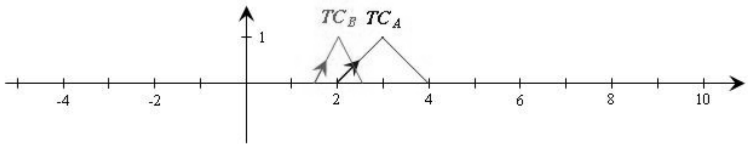
Na rysunku 6 ekspert przedstawił prognozowane kształtowanie się kosztów całkowitych w poszczególnych jednostkach. Widzimy, że w obu jednostkach koszty całkowite rosną. W jednostce A ($TC_A = (2 \quad 3 \quad 3 \quad 4)$) przewidywane koszty powinny się kształtować na poziomie „około 3"mln i jest to wzrost o około 2mln w stosunku do okresu bieżącego. Natomiast w jednostce B $(TR_B = (1{,}5 \quad 2 \quad 2 \quad 2{,}5))$ koszty całkowite będą oscylować w okolicy „około 2"mln i będą wyższe o około 1mln. Wynika stąd również, że bieżące koszty całkowite w obu jednostkach A i B są na poziomie „około 1"mln. Z informacji uzyskanych dla poszczególnych jednostek można wyciągnąć wnioski dotyczące kształtowania się kosztów całkowitych dla przedsiębiorstwa. I tak koszt całkowity będzie się kształtował na poziomie „około 5"mln co stanowi jego wzrost o około 3mln. Ponadto bieżące koszty całkowite są na poziomie około 2mln. Te same wnioski możemy odtworzyć z rysunku 7, który pokazuje skierowaną liczbę rozmytą będącą sumą skierowanych liczb rozmytych reprezentujących koszty całkowite z jednostek A i B $(TC_A + TC_B = (3{,}5 \quad 5 \quad 5 \quad 6{,}5))$.

Rysunek 5. Prognozowany przychód całkowity przedsiębiorstwa.



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 6. Prognozowane koszty całkowite jednostek A i B

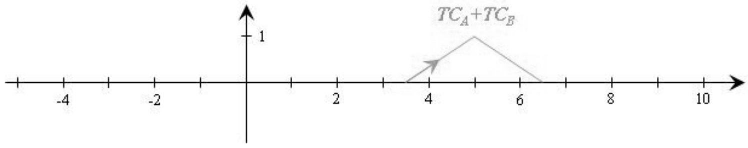


Źródło: opracowanie własne.

Znajomość prognozowanych przychodów i kosztów w poszczególnych jednostkach oraz dla całego przedsiębiorstwa, umożliwia określenie prognozowanych zysków. I tak, w jednostce A $(Z_A = (1\ 2\ 2\ 3))$ prognozowany zysk będzie wynosił „około 2"mln i będzie wyższy o 2mln w stosunku do okresu bieżącego, w którym jednostka balansuje na granicy zysku i straty. Z kolei w jednostce B $(Z_B = (2{,}5\ 1\ 1\ -0{,}5))$ zysk wyniesie „około 1"mln i będzie niższy o 3mln od zysku bieżącego. Wnioski te widoczne są na rysunku 8, który pokazuje skierowane liczby rozmyte Z będące różnicą skierowanych liczb rozmytych $TR - TC$. Rysunek 9 pokazuje prognozowany zysk przedsiębiorstwa $Z_A + Z_B = (3{,}5\ 3\ 3\ 2{,}5)$.

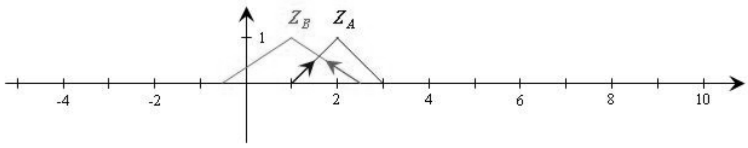
Wyniesie on „około 3”mln co oznacza spadek o 1mln w stosunku do bieżącego zysku wynoszącego 4mln.

Rysunek 7. Prognozowany koszt całkowity przedsiębiorstwa



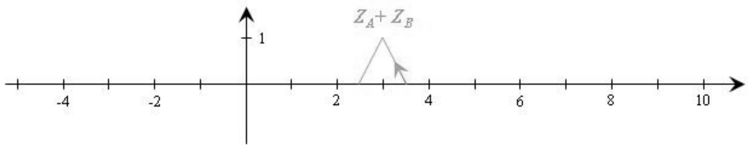
Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 8. Prognozowane zyski jednostek A i B



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 9. Prognozowany zysk przedsiębiorstwa.



Źródło: opracowanie własne.

Zakończenie

W pracy przedstawiono model skierowanych liczb rozmytych, którego arytmetyka jest analogiczna do działań na liczbach rzeczywistych. Przykład wykorzystania *OFN* w ekonomii pokazuje, że skierowane liczby rozmyte pozwalają na jednoczesne prezentowanie kilku wielkości. Ponadto wnioski wyciągane na podstawie działań na liczbach rozmytych są zgodne z wiedzą i analizą ekonomiczną. Sprawia to, że model skierowanych liczb rozmytych może być doskonałym narzędziem w analizie i modelowaniu ekonomicznym.

Literatura

1. Czarny B., Rapacki R. (2002), *Podstawy ekonomii*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
2. Dubois D., Prade H. (1978), *Operations on fuzzy numbers*, Int. J. System Science 9, s.613–626.

3. Kacprzak D. (2008), *Ewolucja liczb rozmytych*, VII Konferencja naukowo-praktyczna: Energia w nauce i technice, s.783-796.
4. Kacprzak D. (2008), *Model Leontiewa i skierowane liczby rozmyte*, VII Konferencja naukowo-praktyczna: Energia w nauce i technice, s.797–815.
5. Kacprzak D. (2010), *Skierowane liczby rozmyte w modelowaniu ekonomicznych*, Optimum – Studia Ekonomiczne, nr 3, s.263-281.
6. Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D. (2002), *Drawback of fuzzy arthmetics – new intutions and propositions*, in: Proc. AI METH, Methods of Aritificial Intelligence, Burczyński T., Cholewa W., Moczulski W., (eds.), Gliwice, Poland (2002), s.231–237.
7. Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D. (2002), *On algebraic operations on fuzzy reals, in: Advances in Soft Computing*, Proc. of the Sixth Int. Conference on Neutral Networks and Soft Computing, Zakopane, Poland June 11–15, 2002, Rutkowski L., Kasprzyk J. (eds.), Physica-Verlag, Heidelberg, s.54–61.
8. Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D. (2003), *Ordered fuzzy numbers*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math., Ser. Sci. Math., 51, (3), s.327–339.
9. Kosiński W., Prokopowicz P. (2004), *Algebra liczb rozmytych, Matematyka stosowana*, 5 (46), 2004, Pismo Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Warszawa, s.37–63.
10. Zadeh L.A. (1965), *Fuzzy sets*, Information and Control 8, s.338–353.

Streszczenie

W pracy przedstawiono model skierowanych liczb rozmytych, który pozbawiony jest niedoskonałości wcześniejszych modeli liczb rozmytych. Działania arytmetyczne w modelu *OFN* wykonywane są w sposób analogiczny do działań na liczbach rzeczywistych. Ponadto liczby rzeczywiste stanowią szczególny przypadek skierowanych liczb rozmytych.

Zaprezentowano również przykład użycia *OFN* do opisu przychodu i kosztu całkowitego przedsiębiorstwa. Liczby te pozwalają na jednoczesną prezentację większej ilość informacji i łatwe ich przetwarzanie. Sprawia to, że skierowane liczby rozmyte mogą się okazać niezwykle użytecznym narzędziem w modelowaniu ekonomicznym.

Słowa kluczowe

liczby rozmyte, skierowane liczby rozmyte, przychód całkowity, koszt całkowity

Total revenue and total cost modeling by ordered fuzzy numbers (Summary)

In this paper the model of ordered fuzzy numbers is shortly presented. The new model of fuzzy numbers makes possible to deal with fuzzy inputs quantitatively, exactly in the same way as with real numbers. In next step is shown an application of *OFN* in the modeling of an economic variables, like total revenue and total cost.

Keywords

fuzzy numbers, ordered fuzzy numbers, total revenue, total cost